

# Particle Swarm Optimizationの基礎的検討と混合変数問題への適用

|     |   |
|-----|---|
| 著者  | 北山 哲士, 荒川 雅生, 山崎 光悦   |
| 雑誌名 | 日本機械学会論文集A編   |
| 巻   | 71  |
| 号   | 706   |
| ページ | 968-975   |
| 発行年 | 2005-01-01  |
| URL | <a href="http://hdl.handle.net/2297/2271">http://hdl.handle.net/2297/2271</a> |

# Particle Swarm Optimizationの基礎的検討と混合変数問題への適用

北山哲士<sup>\*1</sup> 荒川雅生<sup>\*2</sup> 山崎光悦

## Basic Examination on Particle Swarm Optimization and its Application to the Mixed Design Variable Problems

Satoshi KITAYAMA, Masao ARAKAWA and Koetsu YAMAZAKI

Department of Human & Mechanical Systems Engineering, Kanazawa University,  
2-40-20 Kodatsuno, Kanazawa-shi, Ishikawa, 920-8667, Japan

In this paper we examine the basic characters of Particle Swarm Optimization (PSO), and apply it the mixed design variable problems. Some models of PSO have been proposed, but the basic characters of PSO are not well described. PSO is mainly a method to find a global or quasi-minimum for a nonlinear and non-convex optimization problem of the continuous design variables, and few researches of PSO about optimization problems with the discrete design variables have been reported. In this paper we also show the penalty function approach to treat the discrete design variables. To treat the discrete design variables as penalty function, it is possible to treat all design variables as the continuous design variables. As a result, the penalty parameter for the penalty function is needed. Additionally, we also present how to determine the penalty parameter for the penalty function. Through typical mathematical and structural optimization problems, the validity of proposed approach is examined.

**Key Words :** Optimum Design, Particle Swarm Optimization, Global Optimization,  
Discrete Design Variables

### 1 緒言

Particle Swarm Optimization(以下, PSOと略記する)は, 単純化された社会モデルのシミュレーションを通じて, Kennedyらにより開発されたメタ戦略の一つである。これまでの数多くの数値実験の結果, 連続変数の多峰性関数の大域的最適解もしくはそれに相当するような準最適解を高い精度で求めることが可能であることが知られている<sup>(1),(2)</sup>。多点探索を基本とするメタ戦略と称される方法の多くは,

(1) 関数の感度(勾配)を利用しないため, 微分不可能な問題にも適用できる。

(2) 集団で探索を行うため, 1点探索法に比べれば幅広い探索を行える。

などといった特徴を持つ。特に上記(1)に関しては, 離散変数問題を扱う上で, 数理計画法に代表される関数の感度を利用する方法が直接的には扱えない分野であり, メタ戦略がある意味で有効である分野であった。そのため, メタ戦略は組合せ最適化問題や離散変数問題<sup>(3)</sup>に向いているとされている。

メタ戦略の一つである遺伝的アルゴリズム(以下, GAと略記)を考えると, 基本的には設計変数を0-1で表現するため, 離散変数に向いているとされており。混合変数を扱う場合は, 連続変数を表現する部分を適当なビット長で表現する方法が良く用いられており, 0-1のビットで考えるのが自然であろう<sup>(4)</sup>。

PSOは本来, 連続変数の多峰性関数の大域的最適解もしくはそれに相当する準最適解を求める方法であるが, 当然のことながら, PSOを離散変数や離散変数と連続変数から構成される混合変数問題へ適用した研究もいくつか行われている<sup>(5),(6)</sup>。それらの研究例では, 離散変数に対して何ら工夫をせずに直接的に連続変数と扱い, 得られた最適解の近傍の離散値を解とするものや, 連続変数として扱い, 最適解を求めた後に, 四捨五入や切り捨てによって離散値とするものである。しかしこの方法は一見有効であるように思われるが, いくつかの問題点を含んでいる。

ここで離散変数を直接的に連続変数として扱う場合を考えてみよう。例えば図1(a)に示すような関数の場合, 離散値である点Aと点Bの間で目的関数が最適解 $x_L$ に収束したとする。最適解 $x_L$ 近傍の離散値である点Bを離散変数の最適解とすれば, 目的関数値は点Aよりも改悪されてしまい, 必ずしも連続変数の解近傍の離

\* 原稿受付 平成??年??月??日

\*<sup>1</sup> 正員, 金沢大学工学部(〒920-8667 金沢市小立野2-40-20)。

\*<sup>2</sup> 正員, 香川大学工学部(〒761-0396 高松市林町2217-20)。

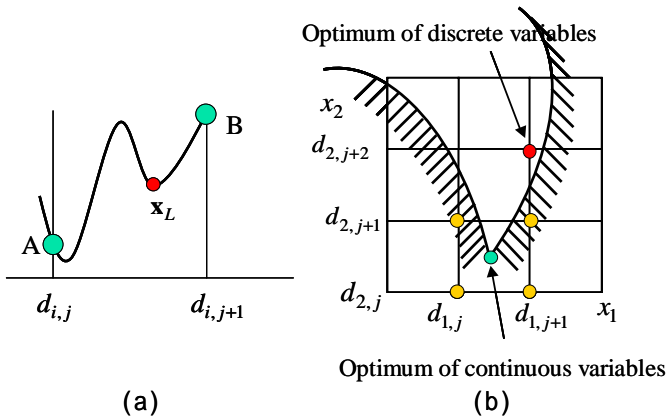


Fig.1 Local optimum nature of discrete optimization

散変数が目的関数を最小とするものではない。

また図1(b)に示すような場合、すなわち連続変数の近傍の離散値が制約条件をすべて満足しない場合は、離散変数を直接的に連続変数として解くこと自体に問題がある。離散変数に対するいくつかの解法は、文献(11)にまとめられている。

PSOは本来、連続変数から構成される多峰性関数の最適解を求めるために開発された方法であることを考慮すれば、離散変数を何らかの形で変換して、すべての変数を連続変数として統一的に扱うほうがPSO本来の姿にふさわしいと考える。

そこで本論文では、PSOの離散変数もしくは混合変数非線形最適化問題に対する一つの解法を示す。はじめにPSOの基礎的な検討を行い、次に離散変数の取扱いについて説明する。数値計算例において、離散変数および混合変数最適化問題に対してPSOを適用し、その有効性を検討し、結言を述べる。

## 2 Particle Swarm Optimization

PSOは鳥や魚などの群れの行動、さらには人間の社会活動というものは、集団を構成する個々の情報を共有しながら進化を続けているということを基にした最適化手法である。PSOは、個体(Particle)が持つ最良の情報(p-best)と、その個体から形成されるグループ(Swarm)の最適値(g-best)から、過去の探索履歴を考慮して連続変数の多峰性関数の大域的最適解、もしくはそれに相当する準最適解を求める手法である。PSOでは各個体(Particle)が「位置」と「速度」を持ち、集団(Swarm)で探索を行い、各個体の位置と速度を更新しながら、最適解を探索する方法である。

**2.1 位置と速度の更新**  $k$  回目の探索において、個体  $d$  の位置  $x_d^k$  と速度  $v_d^k$  を用いて、 $k+1$  回目の位置  $x_d^{k+1}$  と速度  $v_d^{k+1}$  は、次の式を用いて更新される。

$$x_d^{k+1} = x_d^k + v_d^{k+1} \quad (1)$$

$$v_d^{k+1} = wv_d^k + c_1r_1(p_d^k - x_d^k) + c_2r_2(p_g^k - x_d^k) \quad (2)$$

式(2)において、 $r_1$  と  $r_2$  は  $[0, 1)$  の乱数である。また  $c_1$  と  $c_2$  はパラメータであり、一般には

$$c_1 + c_2 = 4 \quad (3)$$

となるように、 $c_1$  と  $c_2$  は決められている。また  $w$  は慣性項と呼ばれるパラメータである。 $p_d^k$  は、個体  $d$  が  $k$  回目までの探索において、今までで訪れた最良の解(p-best)を表す。一方、 $p_g^k$  は  $k$  回目の探索において、群れ全体の中での最良の解(g-best)を表す。

**2.2 基本アルゴリズム** PSOの基本アルゴリズムは次のようになる。

(STEP1) 個体数、最大探索回数を決める。

(STEP2) 各個体に対して、ランダムに初期位置  $x_d^k$  と初期速度  $v_d^k$  を決める。 $k=1$  とする。

(STEP3) 各個体に対して、関数値を計算する。

(STEP4)  $p_d^k$  と  $p_g^k$  を求める。

(STEP5) 各個体の速度と位置を式(1)、(2)に従い更新する。

(STEP6) 探索回数  $k$  が最大探索回数以下なら  $k=k+1$  としてSTEP3へ戻る。そうでなければ、探索終了。

**2.3 PSOの近傍** 式(1)と(2)より、個体  $d$  の  $k+1$  回目の位置  $x_d^{k+1}$  は

$$x_d^{k+1} = x_d^k + wv_d^k + \phi(q - x_d^k) \quad (4)$$

と変形することができる。ここで式(4)中の  $\phi$  と  $q$  はそれぞれ、次のようになる。

$$\phi = c_1r_1 + c_2r_2 \quad (5)$$

$$q = \frac{c_1r_1p_d^k + c_2r_2p_g^k}{c_1r_1 + c_2r_2} \quad (6)$$

これは図2に示すように現在の位置  $x_d^k$  から  $wv_d^k$  だけ平行移動した位置に近傍を生成する。また近傍の大きさは  $|\phi(q - x_d^k)|$  となる。

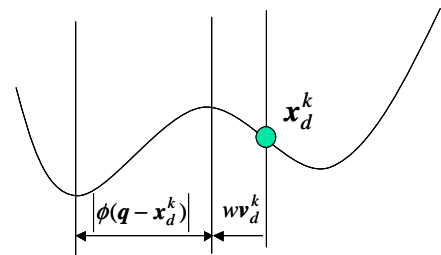


Fig.2 Neighborhood of PSO

**2.4 勾配法との類似について** PSOの探索は、感度に基づく勾配法との類似構造を持つ。式(4)の右辺において  $q - x_d^k$  を探索方向ベクトル、 $\phi$  をステップ幅と見なすこともできる。また式(5)より、 $r_1, r_2$  は  $[0, 1)$  の乱数のため、ステップ幅  $\phi$  は最小値0、最大値  $c_1 + c_2$ 、平均値  $(c_1 + c_2)/2$  の分布に従う。そのため、PSOは確率的なステップ幅を持った降下法と見なすこ

ともできる．そのため，仮に大域的最適解が得られないとしても，GAなどの多点探索法と比べれば，高い精度で準最適解が得られることが期待できる．詳細については，文献(8)を参照されたい．

**2.5 慣性項について** PSOでは，探索が進むにつれ，慣性項は次の式に従って，線形的に変化する．

$$w = w_{\max} - \frac{w_{\max} - w_{\min}}{k_{\max}} \times k \quad (7)$$

ここで  $w_{\max}$  と  $w_{\min}$  はそれぞれ慣性項の最大値と最小値を表し， $k_{\max}$  は最大探索回数である．一般に  $w_{\max}$  と  $w_{\min}$  は次の値が推奨されている<sup>(9)</sup>．

$$w_{\max} = 0.9 \quad (8)$$

$$w_{\min} = 0.4 \quad (9)$$

慣性項は，式(4)および図2からも明らかなように，個体  $d$  の現在の位置  $x_d^k$  からの平行移動量が探索が進むにつれて，小さくなることを意味する．

**2.6 最良値保存型モデル<sup>(10)</sup>** 式(2)中の  $p_g^k$  は， $k$  回目の探索において，群れ全体の中での最良値を与える個体(g-best)を表すが，これは式(1)と式(2)によって更新された点の中で目的関数の最良値を与える個体となる．すなわちp-bestは目的関数が更新されるまで保存されるものの，g-bestは各探索回数ごとに更新されることもあり，大域的な探索能力のみならず局所的な探索能力までも低下させ，結果として収束を遅らせる場合も考えられる．そこで，今までの探索において得られた最良の解へ向って群れ全体が移動し，結果として，局所の探索能力向上するようなモデルも提案されている．これは最良値保存型モデルと呼ばれており，式(2)中の  $p_g^k$  を

$$p_d^{k+1} = w p_d^k + c_1 r_1 (p_d^k - x_d^k) + c_2 r_2 (p_g^k - x_d^k) \quad (10)$$

と置き換えたモデルである．ここで  $p_g^k$  は今までの探索で得られた最良値を与える個体を表す．

### 3 離散変数の取扱い

本論文では，離散変数をペナルティ関数として扱うことにより，すべての変数を連続変数として扱い，最適解を求める方法を用いることにする．

**3.1 問題設定** 連続変数と離散変数の混合変数から構成される最適化問題は次のように定式化される<sup>(11)</sup>．

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \\ \text{Subject to} \\ x_{i,L} &\leq x_i \leq x_{i,U} \quad i=1,2,\dots,m \\ x_j &\in D_j \quad D_j(d_{j,1}, d_{j,2}, \dots, d_{j,q}) \quad j=1,2,\dots,n \\ g_k(x) &\leq 0 \quad k=1,2,\dots,ncon \end{aligned} \quad (11)$$

ここで  $x$  は連続変数と離散変数から成る混合変数の設計変数ベクトルであり， $f(x)$  は最小化する目的関数で

ある． $x_i$  は連続変数を表し， $m$  はその数である．また， $x_{i,L}$  と  $x_{i,U}$  はそれぞれ， $i$  番目の連続変数に直接的に課せられる側面制約条件の下限值と上限値である． $D_j$  は  $j$  番目の離散値の集合を表し， $n$  は離散変数の数であり， $q$  は離散値の数を表す． $d_{i,j}$  は  $i$  番目の離散変数の  $j$  番目の成分を表し，離散変数の側面制約条件は， $d_{j,1}$  と  $d_{j,q}$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) がそれぞれ下限値と上限値になる． $g_k(x)$  は不等式(挙動)制約条件であり， $ncon$  は挙動制約条件の数である．

**3.2 ペナルティ関数** 離散変数をペナルティ関数として扱う場合，いくつかの方法が考えられるが，本論文では，次式で表されるペナルティ関数<sup>(12)</sup>を用いる．

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left[ \sin \frac{2\pi \{x_i - 0.25(d_{i,j+1} + 3d_{i,j})\}}{d_{i,j+1} - d_{i,j}} + 1 \right] \quad (12)$$

ここで  $d_{i,j}$  と  $d_{i,j+1}$  は離散変数であり，連続変数  $x_i$  の近傍点である．上式のペナルティ関数を目的関数と挙動制約条件に組み込んだ拡大目的関数は

$$F(x) = f(x) + s\phi(x) + r \sum_{k=1}^{ncon} \max[0, g_k(x)] \quad (13)$$

となる．式(13)中の  $s$  は式(12)のペナルティ関数に対するペナルティ係数であり，また  $r$  は挙動制約条件に対するペナルティ係数である．式(12)を用いることにより，混合変数最適化問題はすべての変数を連続変数として扱うことが可能となり，式(13)の拡大目的関数を最小化する問題へ変換される．

$$\begin{aligned} F(x) &\rightarrow \min \\ \text{Subject to} \end{aligned} \quad (14)$$

$$x_{i,L} \leq x_i \leq x_{i,U} \quad i=1,2,\dots,m$$

$$d_{j,1} \leq x_j \leq d_{j,q} \quad j=1,2,\dots,n$$

以下の議論では，簡単のため，変数はすべて離散変数とする．混合変数の場合は，3.8節で述べる．

**3.3 離散変数に対するペナルティ関数の性質** 式(12)のペナルティ関数は，離散値近傍の点では，ペナルティ関数値  $\phi(x)$  は小さくなり，離散値から離れるに従い，ペナルティ関数値  $\phi(x)$  は大きくなる．そのため， $k$  回目の探索において，集団の中での最適値を与える個体  $p_g^k$  が

$$\phi(p_g^k) \leq \varepsilon \quad (15)$$

を満足した場合，その最良値を与える  $p_g^k$  の近傍に離散値が存在する．ここで  $\varepsilon$  は小さな正数である．そのため，式(15)を満足するように式(13)の離散変数に対するペナルティ係数  $s$  を更新すればよい．ペナルティ関数による影響を調べるため，次に示す簡単な1変数の離散(整数)変数問題を考える．

[例題]

$$\text{Find } x = \{-1, 0, 1, 2\} \quad (16)$$

$$f(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + 8x \rightarrow \min \quad (17)$$

この場合，ペナルティ係数  $s$  を  $s=10$  とした場合の目的関数と拡大目的関数の様子を図3に示す．

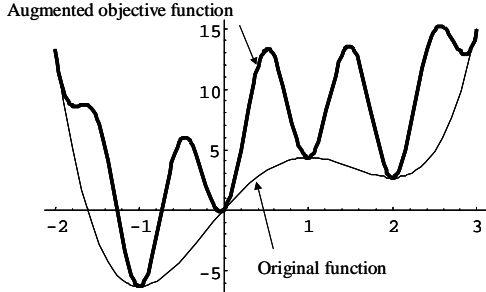


Fig.3 Augmented and original objective function

図3から明らかなように，拡大目的関数は離散値において極値（極小値）を生成することがわかる．なお，整数変数の場合も同様に，整数値において極値（極小値）を生成する．このため，離散変数の最適解を求めることは，式（13）の拡大目的関数  $F(x)$  の大域的な最適解を求める問題へと変換されることになる．そのため，多峰性関数の大域的最適解もしくは準最適解を求めるために開発されたPSOの適用が可能であると考えられる．

さらに式（17）の元の関数  $f(x)$  と離散変数をペナルティ関数として組み込んだ拡大目的関数  $F(x)$  の相対的な誤差が小さくなった点が離散値近傍の点を与えることがわかる．そこで収束判定として直接的に式（15）ではなく，次の式を収束判定として用いる．

$$\frac{|F(p_g^k) - f(p_g^k)|}{|F(p_g^k)|} \leq \varepsilon \quad (18)$$

ここで  $\varepsilon$  は十分小さな正数とする．また  $|F(p_g^k)| \leq \varepsilon$  となる場合は分子のみを収束判定として用いる．PSOは勾配法との類似の構造をもっているものの関数値のみを扱い最適解を探索する手法であるということを考慮すれば，感度に基づく方法と比較した場合，式（15）を厳密に満足することが比較的困難であると思われる

ためである．また，いくつかのペナルティ係数  $s$  の変化による拡大目的関数の変化を図4に示す．

**3.4 離散変数に対する初期ペナルティ係数** 式（13）中の離散変数に対するペナルティ係数  $s$  の初期値を次のように決定する．すなわち，各個体の初期探索点  $x_d$  がランダムに決定されるので，各個体に対して，式（12）のペナルティ関数値を計算する．

$$s_d = 1 + \phi(x_d) \quad d = 1, 2, \dots, agent \quad (19)$$

ここで  $s_d$  は第  $d$  番目の個体に関するペナルティ係数を表し， $agent$  は全個体数を表す．そして，各探索点に対するペナルティ係数  $s_d$  の中で最小となるペナルティ係数

$$s_{initial} = \min\{s_1, s_2, \dots, s_{agent}\} \quad (20)$$

を初期ペナルティ係数とする．これは，初期段階である程度，拡大目的関数に多峰性を持たせ，離散値近傍に極値（極小値）を生成させるためである．

**3.5 ペナルティ係数の更新** ペナルティ係数  $s$  の更新は次式に従うものとする．

$$s = s \times \exp(1 + \phi(p_g^k)) \quad (21)$$

ペナルティ係数の更新による拡大目的関数の様子を図5に示す．図5に示すように，ペナルティ係数の更新により，拡大目的関数は実線から点線のように，多峰性が激しくなる．例えば  $p_g^k$  に対応する点Aが式（18）の収束条件を満足しない場合は，ペナルティ係数の更新により，点線で表される拡大目的関数上の点A'に対応することになる．PSOが感度に基づく降下法との類似を持っていることを考慮すれば， $p_g^k$  は図5中の矢印のように移動することが考えられ，結果として離散値の近傍へ移動する．

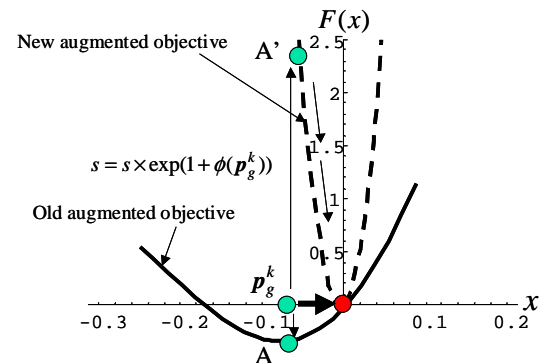


Fig.5 Update of penalty parameter

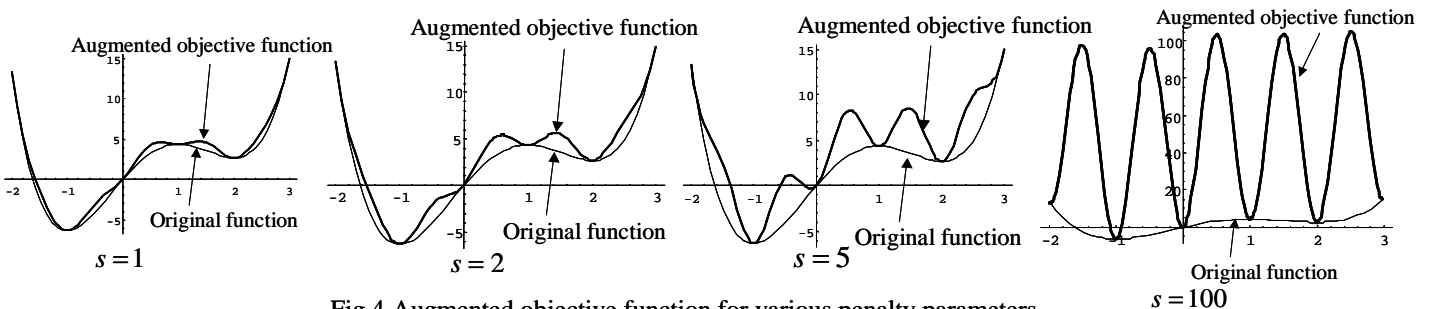


Fig.4 Augmented objective function for various penalty parameters

**3.6 ペナルティ係数の初期化** 式(18)を満足した場合、その最良値を与える  $p_g^k$  の近傍に離散値の最適解が存在する。そこで、別の離散値の最適解を見つけるために式(20)の初期ペナルティ係数を用いて、別の離散値を見つける。これは、ペナルティ係数の増大に伴い、拡大目的関数が図4のように多峰性が激しくなり、その結果、 $p_g^k$ が(局所的)最適解から探索点が脱出できなくなる可能性があるためである。そのため、式(18)を満足する  $p_g^k$ が見つかった場合、その解を一つの(局所的な)最適解として、ペナルティ係数を初期値に戻すことにより、拡大目的関数の多峰性の緩和を図る。

**3.7 従来の方法との相違** Shinらの方法<sup>(12)</sup>では、探索開始時において、すべての変数を連続変数として一旦最適解を求める。この際、離散変数に対するペナルティ関数は考慮せず、式(13)の離散変数に対するペナルティ係数  $s$  をゼロと置いている。そして得られた最適解の近傍の離散値へ近づくようにペナルティ係数  $s$  を更新している。これは探索開始時にペナルティ係数  $s$  を含めた場合、目的関数が多峰性関数となり、局所最適解に陥ることがあるためである。

一方で提案する手法は、探索開始時から離散変数に対するペナルティ係数  $s$  を積極的に導入することにより、はじめから多峰性関数としてしまうことである。PSOが連続変数から構成される多峰性関数の大域的最適解、もしくは準最適解を求めることが可能であることを考えれば、提案する離散変数の取扱いは有効であると考えられる。また離散変数に対するペナルティ関数のペナルティ係数の初期化を導入することで、個体が局所最適解へ陥ったとしても、拡大目的関数の緩和を図ることにより、局所最適解からの脱出がある程度可能であり、さらにペナルティ係数の更新に際し、Shinらは定数を掛けることにより、ペナルティ係数を増加させていたが、本論文では、ペナルティ関数値を用いているため、収束状況に応じてペナルティ係数は変化する。

**3.8 混合変数の場合** 混合変数の場合、集団の中で最良値を与える  $p_g^k$  は、連続変数の成分と離散変数の成分から構成されることになる。ここで連続変数の成分を  $x^{conti}$ 、離散変数の成分を  $x^{discret}$  とまとめて表記すれば、 $p_g^k$  は

$$p_g^k = (x^{conti}, x^{discret})^T \quad (22)$$

となる。そこで、式(18)の収束判定を行う際は、 $p_g^k$ の中で連続変数の成分  $x^{conti}$  を無視し、離散変数に相当する成分  $x^{discret}$  に対してのみ、ペナルティ関数値を計算し、収束判定を行えばよい。

## 4 アルゴリズム

本章では、PSO (g-bestモデル)に対する混合変数問題の流れを示す。

(STEP1)初期パラメータを設定する。また繰り返し回数  $k=1$  とする。

(STEP2)各個体に対して、ランダムに位置と速度を決定する。

(STEP3)各個体に対して、式(12)の離散変数に関するペナルティ関数値を計算する。

(STEP4)ペナルティ関数値から、各個体に対して、式(19)のペナルティ係数  $s$  を求める。

(STEP5)STEP4で求めた各個体に対するペナルティ係数の中で、最も小さなペナルティ係数を取るものを初期ペナルティ係数  $s_{initial}$  とする。

(STEP6)各個体に対して、式(13)の拡大目的関数値を計算する。

(STEP7)各個体の最良値  $p_d^k$  と群れの中の最良値  $p_g^k$  を求める。

(STEP8)式(18)による収束の判断。(ただし  $|F(p_g^k)| \leq \varepsilon$  の場合は式(18)の分子を用いて収束判定を行う。)式(18)を満足していれば、 $p_g^k$ の近傍に離散値があると判断し、ペナルティ係数をSTEP5で求めた初期ペナルティ係数へ変更する。そうでなければ、式(21)に従いペナルティ係数を更新する。

(STEP9)式(7)により、慣性項を変更する。

(STEP10)式(1),(2)を用いて、各個体の位置と速度を

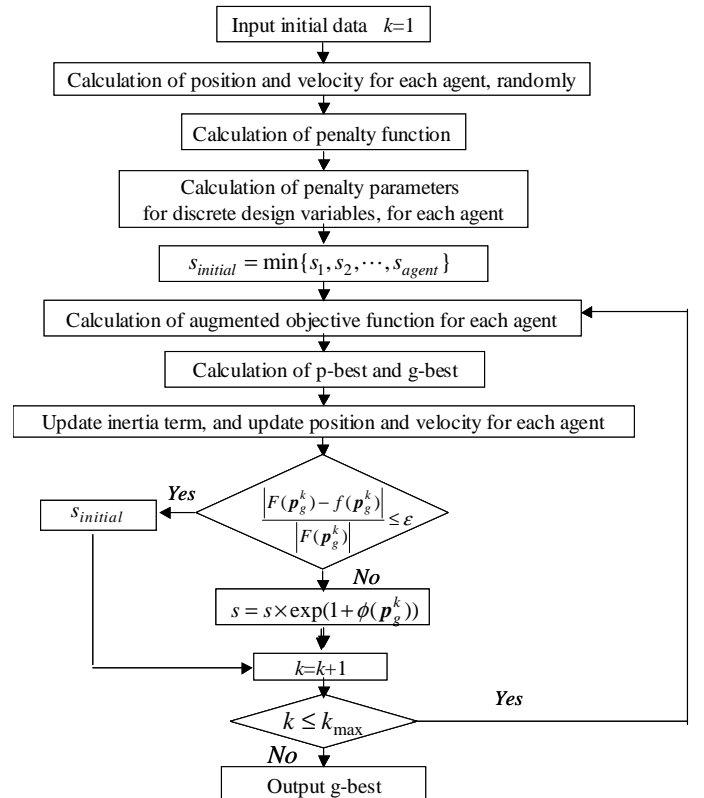


Fig.6 Flowchart of proposed approach



更新する．

(STEP11)  $k = k + 1$  とし，繰返し回数を更新する．

(STEP12) 探索の初期に決めた最大繰返し回数  $k_{\max}$  と繰返し回数を比べる．

$$k \leq k_{\max} \quad (23)$$

であれば，STEP3へ戻る．そうでなければ， $p_g^k$  を最適解として探索を終了する．

全体の流れを図6に示す．また，最良値保存型モデルの場合は， $p_g^k$  を  $p_g$  に置き換えればよい．

## 5 数値計算例

本論文で提案する離散変数の取扱いの有効性について，数値計算例を通じて検討を行う．なお，数値計算例における式(18)の収束判定値  $\varepsilon$  は  $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-2}$  を用いた．また数値計算例では，最良値保存型モデルを用いた．これは，通常のg-bestモデルよりも，(局所的な)探索能力が向上することがいくつかの数値計算から判明したためであり，また複数の局所的最適解が見つかる可能性があるためである<sup>(8)</sup>．

**5.1 2変数問題(Rosenbrock's Test Function)** 次の2変数問題を考える<sup>(13)</sup>．ここで，各変数は共に離散値であり，0.55間隔に位置するものとする．

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \rightarrow \min \quad (24)$$

$$-0.55 \leq x \leq 4.95 \quad (25)$$

離散変数の最適解  $x_{opt}^D = (1.65, 2.75)^T$  および連続変数の最適解  $x_{opt}^C = (1, 1)^T$  を図7に示す．また図7中の  $\times$  は，離散値を表す．この問題は，変数を連続変数として扱い，得られた解の近傍点を離散変数の最適解としても最適解が得られない典型的な問題である．

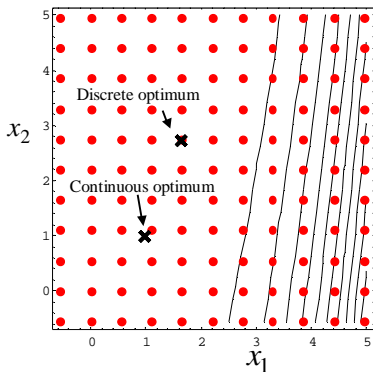


Fig.7 Discrete and continuous optimum

個体数を10，全探索回数を100としたとき，探索の過程でどのように拡大目的関数が変化したのかを調べてみる．ここでは，拡大目的関数の等高線の変化をペナルティ係数とあわせて図8に示すことにする．

式(20)の初期ペナルティ係数が  $s = 1.344$  であり，このときの拡大目的関数の等高線は図8(a)のようであり，ペナルティ関数の影響が出ておらず，式(24)を

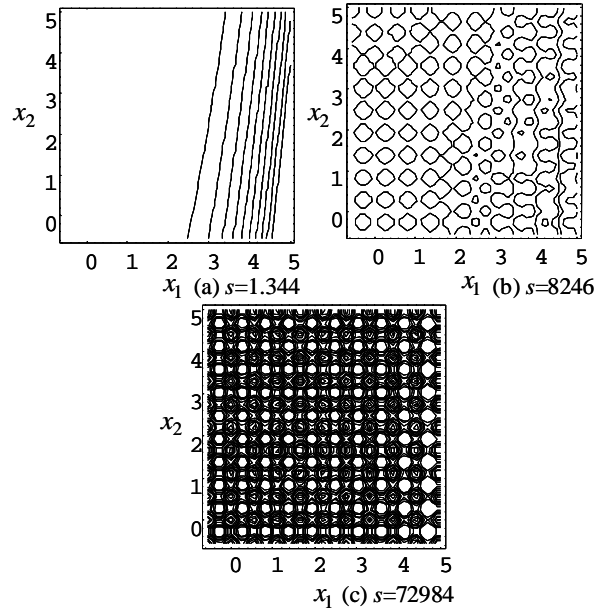


Fig.8 Contourplot of augmented objective function

連続変数として扱った場合の等高線と何ら変わりがない．探索の過程で拡大目的関数の等高線は徐々に変化し，図8(b)のように変化し，多峰性が激しくなる．最終的に最適解へg-bestが到達したときの拡大目的関数の等高線は図8(c)のようになる．

図8の拡大目的関数の等高線の変化からわかるように，大域的最適解にg-bestが到達する過程で，拡大目的関数は多峰性が激しくなり，大域的探索能力に優れているとされているPSOでも，その大域的最適解を探索することは容易ではないことが予想される．ただし，本例題の場合，g-bestは離散変数の最適解に到達して探索を終了している．

**5.2 圧力器の最適設計問題** 図9に示すような圧力器の最適設計問題を考える<sup>(14)</sup>．

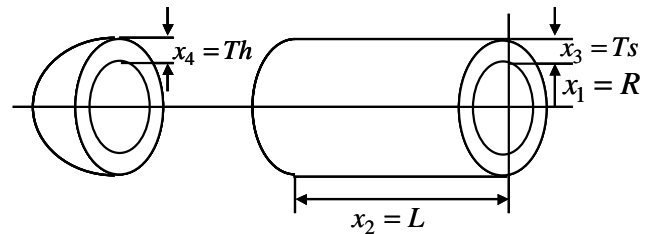


Fig.9 Pressure vessel

この問題は混合変数の最適設計問題の中でも特に有名であり，多くの研究報告がなされている<sup>(15)</sup>．すべての研究報告例を調べているわけではないが，表1に示す代表的な研究結果から察すると，非常に求解の困難な問題であり，高々4変数問題であり，一見すると非常に簡単のように思われるが，大域的最適解を求めることが非常に困難な問題である．設計変数は，圧力器の半径  $R$  (連続変数)，長さ  $L$  (連続変数)，圧力器の厚さ  $T_s$  と  $T_h$  (ともに離散変数) である．目的関数は総製作コストの最小化であり，各設計変数をそれぞ

れ図9のように置き換えると，

$$f(x) = 0.6224x_1x_2x_3 + 1.7781x_1^2x_4 + 3.1661x_2x_3^2 + 19.84x_1x_3^2 \rightarrow \min \quad (26)$$

となる．一方，側面制約条件と挙動制約条件はそれぞれ次のように与えられる．

$$25 \leq x_1 \leq 150 \quad (27)$$

$$25 \leq x_2 \leq 240 \quad (28)$$

$$0.0625 \leq x_3, x_4 \leq 1.25 \quad (29)$$

$$g_1(x) = \frac{0.0193x_1}{x_3} - 1 \leq 0 \quad (30)$$

$$g_2(x) = \frac{0.00954x_1}{x_4} - 1 \leq 0 \quad (31)$$

$$g_3(x) = \frac{x_2}{240} - 1 \leq 0 \quad (32)$$

$$g_4(x) = \frac{1296000 - \frac{4}{3}\pi x_1^3}{\pi x_1^2 x_2} - 1 \leq 0 \quad (33)$$

ただし，離散変数である  $x_3$  と  $x_4$  は，ASMEの規格上，0.0625[ inch]間隔の値しか取れないものとする．

式（30）～式（33）の挙動制約条件は式（13）のようにペナルティ関数として扱い，そのときのペナルティ係数  $r$  は過去の研究報告において，最適解における目的関数値の約2乗以上の値を目安として， $r = 1.0 \times 10^8$  を用いた．

この問題の性質を検討するため，すべての変数を連続変数として扱い，最適解を求めると，

$$x^{opt} = (x_1^{opt}, x_2^{opt}, x_3^{opt}, x_4^{opt})^T = (37.708, 239.870, 0.7277, 0.3597)^T \quad (34)$$

が得られる．そのときの目的関数値は  $f = 5803.972$  である．離散変数である  $x_3$  と  $x_4$  を近傍の離散値へ移動させる（ $x_3 = 0.75$  と  $x_4 = 0.375$ ）と，目的関数値は  $f = 6018.304$  となり大きく改悪される．そこで， $x_4$  を

$x_4 = 0.375$  と固定し， $x_3$  を隣の離散値である  $x_3 = 0.6875$  とすれば，目的関数値は  $f = 5531.008$  となるが，式（30）の制約条件を満足しなくなる．そこで今度は  $x_3$  を  $x_3 = 0.75$  と固定し， $x_4$  を隣の離散値である  $x_4 = 0.3125$  とすれば，目的関数値は  $f = 5860.289$  となるが，式（31）の制約条件を満足しない．

最後に  $x_3$  と  $x_4$  をそれぞれ  $x_3 = 0.6875$  と  $x_4 = 0.3125$  とすれば目的関数値は  $f = 5373.01$  となるが，式（30）の制約条件を満足しない．

個体数を100とし，全探索回数を5000とし，乱数の種を変え，10回試行した．得られた結果の中で最良値のものを表1（PSO, Kitayama）に，また探索の過程でいくつかの局所的最適解が見つかったと思われる最も目的関数の収束の悪かったg-bestの収束状況を図10に示す．図10の収束状況から，2.4節で述べた通り，PSOが

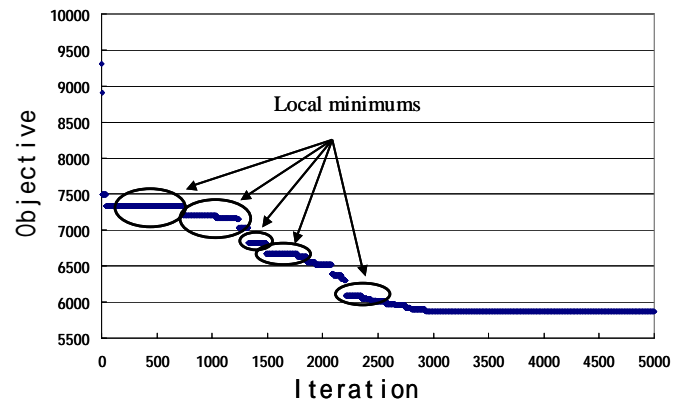


Fig.10 Convergence of objective function

Table 2 Results through 10 trials

| Trial No. | R [inch] | L [inch] | Ts [inch] | Th [inch] | g1     | g2     | g3     | g4     | objective |
|-----------|----------|----------|-----------|-----------|--------|--------|--------|--------|-----------|
| 1         | 38.684   | 224.096  | 0.750     | 0.375     | -0.004 | -0.016 | -0.066 | 0.000  | 5875.254  |
| 2         | 38.661   | 224.688  | 0.750     | 0.375     | -0.005 | -0.016 | -0.064 | 0.000  | 5883.131  |
| 3         | 38.584   | 225.661  | 0.750     | 0.375     | -0.007 | -0.018 | -0.060 | 0.000  | 5889.492  |
| 4         | 38.703   | 225.810  | 0.750     | 0.375     | -0.004 | -0.015 | -0.059 | -0.009 | 5912.406  |
| 5         | 38.698   | 226.370  | 0.750     | 0.375     | -0.004 | -0.016 | -0.057 | -0.011 | 5922.734  |
| 6         | 38.321   | 230.672  | 0.750     | 0.375     | -0.014 | -0.025 | -0.039 | 0.000  | 5943.989  |
| 7         | 38.216   | 231.652  | 0.750     | 0.375     | -0.017 | -0.028 | -0.035 | -0.001 | 5945.312  |
| 8         | 38.184   | 232.045  | 0.750     | 0.375     | -0.017 | -0.029 | -0.033 | 0.000  | 5947.564  |
| 9         | 38.167   | 232.297  | 0.750     | 0.375     | -0.018 | -0.029 | -0.032 | 0.000  | 5949.705  |
| 10        | 38.129   | 233.154  | 0.750     | 0.375     | -0.019 | -0.030 | -0.029 | -0.001 | 5959.964  |

Table 1 Comparison of results

|               | Sandgren <sup>(14)</sup> | Qian <sup>(16)</sup> | Kannan <sup>(13)</sup> | Hsu <sup>(17)</sup> | Lewis <sup>(18)</sup> | Kitayama | Arakawa <sup>(15)</sup> |
|---------------|--------------------------|----------------------|------------------------|---------------------|-----------------------|----------|-------------------------|
| R[inch]       | 47.000                   | 58.312               | 58.291                 | N/A                 | 38.760                | 38.684   | 38.858                  |
| L[inch]       | 117.701                  | 44.522               | 43.690                 | N/A                 | 223.299               | 224.096  | 221.402                 |
| Ts[inch]      | 1.125                    | 1.125                | 1.125                  | N/A                 | 0.750                 | 0.750    | 0.750                   |
| Th[inch]      | 0.625                    | 0.625                | 0.625                  | N/A                 | 0.375                 | 0.375    | 0.375                   |
| g1            | -0.194                   | 0.000                | 0.000                  | N/A                 | -0.003                | -0.004   | 0.000                   |
| g2            | -0.283                   | -0.110               | -0.110                 | N/A                 | -0.014                | -0.016   | -0.011                  |
| g3            | -0.510                   | -0.814               | -0.818                 | N/A                 | -0.070                | -0.066   | -0.078                  |
| g4            | 0.054                    | -0.021               | -1.109                 | N/A                 | -1.519                | 0.000    | 0.000                   |
| Objective[\$] | 8129.800                 | 7238.830             | 7198.200               | 7021.670            | 5980.950              | 5875.254 | 5850.770                |



降下法との類似を持っているため，局所的最適解を見つけていることが判る．さらにペナルティ係数の初期化の影響が顕著に現れており，g-bestが局所的最適解からの脱出が可能となり，本論文で提案する方法の有効性の一端が確認できる．なお10回の試行で，平均2000回程度の探索回数で準最適解が求まっている．

10回試行した結果を表2に示す．提案する方法で離散変数を扱った場合，筆者の一人によって報告されている現時点での大域的最適解 ( $f=5850$ ) は得られなかったが，すべての試行においてLewisらの結果 ( $f=5980$ ) よりも優れた目的関数値が得られ，準最適解は得られたと思われる．

## 5 結言

本論文では連続変数問題の大域的最適解，もしくはそれに相当する準最適解を求めるために開発されたPSOの基礎的な検討を行い，さらに混合変数問題や離散変数問題へ適用できるよう，拡張した．本論文で提案した方法は，離散変数をペナルティ関数として扱うことにより，すべての変数を統一的に連続変数として取り扱う方法である．PSOは本来，連続変数の最適化問題のために開発された方法であることから，本来の性質を損なうことのないよう，離散変数をペナルティ関数として扱った．そして離散変数をペナルティ関数として扱うことにより，拡大目的関数が多峰性関数となり，結局のところ，離散変数もしくは混合変数問題の最適解を求めることは，拡大目的関数の大域的最適解を求めることに帰着されることを示した．数値計算例では，ベンチマーク問題を扱い，本論文で提案した方法の有効性の一端を確認した．

最後に本研究を遂行するにあたり，離散変数の取扱いに関する諸注意などをご教授していただいた山川宏先生（早稲田大学理工学部），中山弘隆先生（甲南大学理工学部）に謝意を表する．

## 参考文献

- (1)井出・安田，適応型Particle Swarm Optimizationに関する基礎的検討，電学論C，123-2，（2004），pp.550-557.
- (2)K.E.Parsopoulos,and M.N.Vrahatis, *Recent approaches to global optimization problems through Particle Swarm Optimization*, Natural Computing,1,(2002),pp.235-306.
- (3)柳浦・茨木，組合せ最適化-メタ戦略を中心として-，（2001），朝倉書店．
- (4)荒川・萩原，領域適応型遺伝的アルゴリズムの混合変数非線形最適設計への適用，機論C，64-621，（1998），pp.1626-16353.

- (5)G.Venter, and J.S.Sobieski, *Particle Swarm Optimization*, 9-th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, (2002),AIAA2002-1235.
- (6)G.Venter,and J.S.Sobieski, *Multidisciplinary Optimization of a Transport Aircraft Wing using Particle Swarm Optimization*, 9-th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, (2002),AIAA2002-5644.
- (7)井出・安田，多点探索を基本としたメタヒューリスティックに関する一考察，電気学会，産業計測制御研究会資料，（2003），C-03-1．
- (8)北山・山崎・青木，Particle Swarm Optimization(最良値保存型モデルの考察)，機講論No.04-1,Vol.7，（2004），pp.225-226.
- (9)安田・井出・岩崎，Particle Swarm Optimization:ダイナミクスの解析と大域的最適化への応用，電気学会C部門大会シンポジウム，No.0S7-6，（2003）．
- (10)P.C.Fourie, and A.A.Groenwold, *The particle swarm optimization algorithm in size and shape optimization*, Structural and Multidisciplinary Optimization, 23-4, (2002), pp.259-267.
- (11)J.S.Arora, and M.W.Huang, *Methods for optimization of nonlinear problems with discrete variables:a review*,Structural Optimizaiton, 8,(1994), pp.69-85.
- (12)D.K.Shin, Z.Gurdal, and O.H.Griffin, *A PENALTY APPROACH FOR NONLINEAR OPTIMIZATION WITH DISCRETE DESIGN VARIABLES*, Engineering Optimization, Vol.16, (1990), pp.29-42.
- (13)B.K.Kannan, and S.N.Kramer,*An Augmented Lagrange Multiplier Based Method for Mixed Intger Discrete Continuous Optimization and Its Applications to Mechanical Design*, Journal of Mechanical Design, Vol.116, (1994), pp.405-411.
- (14)Sandgren,E., *Nonlinear and Discrete Programming in Mechanical Design Optimization*, Journal of Mechanical Design, Vol.112, (1990), pp.223-229.
- (15)M.Arakawa, H.Ishikawa, and T.Miyashita, *Genetic Range Genetic Algorithm to Obtain Quasi-Optimum Solutions*, ASME/DETC/DAC, (2003), Paper No. 48800, in CD-ROM.
- (16)Z.Qian, J.Yu, and J.Zhou, *A Genetic Algorithm for Solving Mixed Discrete Optimization Problems*, DE-Vol.65-1, Advances in Design Automation, 1, pp.499-503, (1993).
- (17)Y. H. Hsu, T.L.Sun, and L.H.Leu, *A Two Stage Sequential Approximation Method for Non-linear Discrete Variable Optimization*, ASME/DETC/DAC MA, pp.197-202.
- (18)K. Lewis, and F. Mistree, *Foraging-Directed Adaptive Liner Programming: An Algorithm for Solving Nonlinear Mixed Discrete/Continuous Design Problems*, ASME/DETC/DAC, (1996), Paper No. 1601, in CD-ROM.